Esercizio: Sia $(G, *)$ un gruppo, e, dato $g \in G$, sia $\varphi_g : G \to G,\ x \mapsto g * x * \overline{g}$. Provare che φ_g è un automorfismo di G.

<u>Svolgimento</u>; Proviamo anzitutto che φ_g è un endomorfismo di gruppi. Siano $x, y \in G$. Allora

$$\varphi_g(x * y) = g * (x * y) * \overline{g} = g * (x * \overline{g} * g * y) * \overline{g} = (g * x * \overline{g}) * (g * y * \overline{g}) = \varphi_g(x) * \varphi_g(y).$$

Inoltre φ_g è invertibile con inversa $\varphi_{\overline{g}}$: infatti, per ogni $x \in G$, si ha

$$\varphi_g \circ \varphi_{\overline{g}}(x) = \varphi_g(\varphi_{\overline{g}}(x)) = g * \left(\overline{g} * x * \overline{\overline{g}}\right) * \overline{g} = (g * \overline{g}) * x * (g * \overline{g}) = x \quad .$$

Ciò prova che $\varphi_g \circ \varphi_{\overline{g}}$ è l'automorfismo identico di G. Analogamente lo si prova per $\varphi_{\overline{g}} \circ \varphi_g$.

Esercizio: Rispetto alle precedenti notazioni, provare le seguenti proprietà:
a) per ogni $g, h \in G,\ \varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{g*h}$;
b) per ogni $g \in G,\ \varphi_g^{-1} = \varphi_{\overline{g}}$;

Inoltre, detto e l'elemento neutro di G, si ha che φ_e è l'automorfismo identico di G.

<u>Svolgimento:</u>
a) Sia $x \in G$. Allora

$$\varphi_g \circ \varphi_h(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = g * (h * x * \overline{h}) * \overline{g} = (g * h) * x * (\overline{h} * \overline{g}) = (g * h) * x * (\overline{g * h}) = \varphi_{g*h}(x).$$

b) La proprietà è già stata provata, ma la possiamo ridimostrare alla luce di (a). Applicando (a) per $h = \overline{g}$, si deduce che $\varphi_g \circ \varphi_{\overline{g}} = \varphi_{g*\overline{g}} = \varphi_e$. Analogamente si prova che $\varphi_{\overline{g}} \circ \varphi_g = \varphi_{\overline{g}*g} = \varphi_e$. A questo punto, per concludere basta applicare l'osservazione finale, di immediata verifica.

Esercizio: Provare che Inn(G) è un sottogruppo di Aut(G).

<u>Svolgimento:</u> Ad Inn(G) appartiene φ_e, automorfismo identico di G. Siano ora $g, h \in G$. Si ha allora, alla luce delle proprietà stabilite nell'esercizio precedente,

$$\varphi_g \circ (\varphi_h)^{-1} = \varphi_g \circ \varphi_{\overline{h}} = \varphi_{g*\overline{h}} \in \mathrm{Inn}(G).$$

In base alla caratterizzazione dei sottogruppi, ciò basta per concludere.

Esercizio: Provare che l'applicazione $\varphi : G \to \mathrm{Inn}(G),\ g \mapsto \varphi_g$ è un omomorfismo di gruppi il cui nucleo è $Z(G)$.

<u>Svolgimento</u>: Siano $g, h \in G$. Allora

$$\varphi(g * h) = \varphi_{g*h} = \varphi_g \circ \varphi_h = \varphi(g) \circ \varphi(h).$$

Ciò prova che φ è omomorfismo di gruppi. Per la seconda parte dell'enunciato, basta ricordare quanto precedentemente stabilito: φ_g è l'automorfismo identico (ossia, come sappiamo, φ_e) se e solo se $g \in Z(G)$.

Esercizio: Determinare Aut(G) quando G è un gruppo di ordine 2 o 3.

<u>Svolgimento:</u> Se G ha ordine 2, allora, detto e il suo elemento neutro, e detto x il suo altro elemento, necessariamente ogni automorfismo di G dovrà inviare e in e e, di conseguenza, x in x. Dunque, in questo caso, Aut(G) è il gruppo banale, costituito dal solo automorfismo identico. Sia ora G un gruppo di ordine 3, siano x e y i suoi elementi distinti dall'elemento neutro e. Allora, oltre all'automorfismo identico, G ammette anche l'automorfismo che invia ogni elemento nel suo simmetrico (giacché G è abeliano). Questo invia x in y e viceversa. Poiché e viene in ogni caso inviato in e, non esistono altri automorfismi. Dunque, in questo caso, Aut(G) ha ordine 2.

<u>Osservazione:</u> Non è vero che, in generale, l'ordine di un gruppo finito determini univocamente l'ordine del suo gruppo degli automorfismi. Come vedremo, per i gruppi di ordine 4, ai due modelli corrispondono gruppi degli automorfismi aventi ordini distinti (6 e 2, rispettivamente, per il primo e per il secondo modello).